

## Grupo I

Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Para cada um deles, escolhe a única opção correta.

1. Seja  $(u_n)$  a sucessão de termo geral  $u_n = \sum_{k=1}^n k$ . Qual é o valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{u_n}$ ?

- (A) 0                                      (B) 1                                      (C) 2                                      (D)  $+\infty$

2. Seja  $f$  uma função diferenciável no intervalo  $[-3, 0]$  tal que:

- $f(0) = 2$
- $\forall x \in [-3, 0], f'(x) \in [-5, -2]$

O teorema de Lagrange, aplicado à função  $f$  em  $[-3, 0]$ , permite concluir que  $f(-3)$  não pode ser igual a:

- (A) 7                                      (B) 9                                      (C) 14                                      (D) 16

3. Considera os vértices de um hexágono regular. Escolhem-se ao acaso dois desses vértices. Qual é a probabilidade de a reta definida por esses vértices passar no centro do hexágono?

- (A)  $\frac{1}{2}$                                       (B)  $\frac{1}{3}$                                       (C)  $\frac{1}{4}$                                       (D)  $\frac{1}{5}$

4. Considera a linha do triângulo de Pascal em que o maior elemento é  ${}^n C_3$ . Quantos números naturais, múltiplos de 10, é possível escrever colocando, lado a lado, todos os algarismos dos elementos dessa linha?

- (A) 1260                                      (B) 3780                                      (C) 163 296                                      (D) 362 880

5. Quatro rapazes e quatro raparigas entram numa carruagem de comboio onde existem seis lugares sentados ainda não ocupados. De quantas maneiras podem ocupar esses seis lugares supondo que fica uma rapariga e um rapaz em pé?

- (A) 576                                      (B) 1440                                      (C) 11 520                                      (D) 20 160

## Grupo II

Na resposta a cada um dos cinco itens deste grupo, apresenta todos os cálculos que efetuares, explica os raciocínios e justifica as conclusões.

1. Considera a sucessão  $(v_n)$  definida por  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1-2\sqrt{k}}{n+k}$  e seja  $(u_n)$  uma sucessão tal que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leq 1$ .

Justifica que a sucessão  $(u_n)$  não é convergente.

2. Seja  $f$  a função definida por  $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ .

a) Considere a função  $h$  definida por  $h(x) = x - f(x)$ . Estuda a função  $h$  quanto à monotonia e quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico. Na tua resposta, apresenta:

- os intervalos em que a função é crescente e os intervalos em que é decrescente;
- os extremos relativos, caso existam;



## Teste 2

FUNÇÕES REAIS DE  
VARIÁVEL REAL.  
CÁLCULO  
COMBINATÓRIO.  
PROBABILIDADES

- os intervalos em que a concavidade do gráfico está voltada para cima, os intervalos em que a concavidade do gráfico está voltada para baixo e as coordenadas dos pontos de inflexão que eventualmente existam.

**b)** Considera a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)+2}{x^2-1} & \text{se } x < -1 \\ \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Mostra que existem exatamente três assíntotas ao gráfico da função  $g$ : uma assíntota vertical, uma assíntota oblíqua e uma assíntota horizontal.

**3.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções diferenciáveis em  $\mathbb{R}$ . Sabe-se que:

- a reta de equação  $y = 3x + 5$  é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $-1$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f^3(x)}{x^2+1}$ .

Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abscissa  $-1$ .

**4.** Seja  $f$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$ , duas vezes diferenciável. Sejam  $a$  e  $b$  números reais, com  $a < b$ . Sabe-se que:

- $f'(a) \times f'(b) < 0$
- $\forall x \in ]a, b[, f''(x) > 0$

Justifica que a função  $f$  atinge um e um só extremo no intervalo  $]a, b[$  e indica se é máximo ou é mínimo.

**5.** Considera o seguinte jogo que consiste no lançamento simultâneo de dois dados cúbicos, equilibrados, com as faces numeradas de 1 a 6, sendo um dado verde e outro branco. A pontuação obtida num lançamento é a soma dos pontos das faces que ficam voltadas para cima.

O jogo vai ser disputado pela Maria e pelo António. Suponhamos que a Maria é a primeira a lançar os dados. Caso queiram, poderão repetir o lançamento dos dois dados, mas a pontuação obtida no segundo lançamento substitui a obtida no primeiro. Vence quem obtiver a maior pontuação. Se as pontuações obtidas foram iguais, é declarado empate.

Apresenta as respostas aos itens seguintes na forma de fração irredutível.

- Admite que a Maria faz o segundo lançamento se e só se obtiver menos de 7 pontos no primeiro lançamento. Qual é a probabilidade de a Maria obter 7 pontos na sua jogada?
- Admite que a Maria faz apenas um lançamento dos dados. Qual é a probabilidade de obter 7 pontos se o número da face voltada para cima no dado verde for superior ao número da face voltada para cima no dado branco?
- A estratégia do António é fazer o segundo lançamento se e só se a pontuação que obtém no primeiro lançamento não for superior à obtida pela Maria na sua jogada. Admite que a Maria obteve 3 pontos na sua jogada. Qual é a probabilidade de o António perder o jogo?

**FIM**